

一类具有治愈期和免疫失效期的 SIRS 模型

许立滨, 李冬梅, 杨美英

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要:考虑具有治愈期和免疫失效期的离散双时滞的 SIRS 传染病模型, 找到决定疾病灭绝与否的阈值, 计算出模型的无病平衡点和地方病平衡点, 证明了无病平衡点的全局稳定性. 并利用反证法和比较原理, 证明疾病的一致持久性. 并通过数值模拟分析治愈期和恢复期对模型的影响.

关键词:双时滞; 治愈期; 免疫失效期; 稳定性; 一致持久性

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2014)06-0113-05

The Stability and the Permanence of an SIRS Epidemic Model with Healing Period and Immune Expiration Period

XU Li-bin, LI Dong-mei, YANG Mei-ying

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: An SIRS epidemic model with two time delays in healing period and immune expiration period is researched. The threshold conditions which determines the epidemic termination were found out, the free-equilibrium and endemic equilibrium were calculated, and the global stability of free-equilibrium was proved. Using the method of rebuttal evidence and the comparison principle of differential equations, the uniform persistence of disease is proved. Immune expiration period and the recover period for the influence of epidemic model by numerical simulation were analyzed at last.

Key words: two time delays; healing period; immune expiration period; stability; uniform persistence

0 引言

随着数学模型在传染病研究中的广泛应用, 具有潜伏期和恢复期的时滞传染病模型的研究结果日趋增多. 某些传染病经过治愈, 或接种疫苗获得暂时免疫, 一旦免疫失效又成为易感者, 如每年出现的流感疾病、乙肝这类传染病在治愈期间具有传染性, 治愈的时间会影响疾病的流行. 而免疫者在免疫失效性后, 在不知情况下会存在更大的感染风险, 疫苗

的失效时间也会带来染病者数量上的改变. 因此, 分析疾病的治愈期和免疫失效期如何影响疾病的传播规律, 在疾病控制上是十分必要的. 近些年出现了具有常数治愈期或免疫失效期的传染病模型, 文[1-4]研究了具有暂时免疫力且免疫失去率为常数的时滞 SIRS 模型, 找到了决定疾病传播与否的阈值, 利用构造 Liapunov 函数的方法, 证明了平衡点的全局稳定性. 文[5-9]研究具有治愈率为常数的时滞 SIR 传染病模型, 运用了 Liapunov 函数的方法证明了模型的全局稳定性, 并给出了周期解存在的

收稿日期: 2014-07-25

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12521099).

作者简介: 许立滨(1961—), 男, 副教授;

杨美英(1988—), 女, 硕士研究生.

通讯作者: 李冬梅(1962—), 女, 教授; E-mail: dmlm2013@126.com.

条件. 因此, 研究带有常数治愈期和免疫失效期的双时滞的传染病模型有很深远的实际意义.

设人口输入为 A , 自然死亡率系数为 μ , 因病死亡率系数为 α , 治愈期为 δ , 免疫失效期为 τ . 在疾病的传播过程中, 部分易感人群被传染, 转化为患病人群, 且部分患病人群经过时间 δ 后治愈, 转化为免疫人群, 而有些免疫的人群会再次被感染, 也就是疾病具有免疫失效, 经过免疫失效期 τ 后, 有一部分恢复人群又转化成为了易感人群.

考虑采用双线性发生率, 建立了如下的具有治愈期和免疫失效期的双时滞的 SIRS 模型

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \\ &\quad \beta S(t - \delta - \tau)I(t - \delta - \tau)e^{-\mu(\delta + \tau)}e^{-\alpha\delta} \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \beta S(t - \delta)I(t - \delta)e^{-(\mu + \alpha)\delta} - \\ &\quad (\mu + \alpha)I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \beta S(t - \delta)I(t - \delta)e^{-(\mu + \alpha)\delta} - \\ &\quad \beta S(t - \delta - \tau)I(t - \delta - \tau)e^{-\mu(\delta + \tau)}e^{-\alpha\delta} - \mu R(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

由生态意义知, 模型(1)在 R_+^3 内研究.

令 $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$, 由 $N'(t) = A - \mu N - \alpha I \leq A - \mu N$ 知, $N(t)$ 有最终上界 $\frac{A}{\mu}$, 故 $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ 均为最终有界函数. 即有 $\Omega = \{(S, I, R) | 0 < S + I + R \leq \frac{A}{\mu}\}$ 是模型(1)的正向不变集.

1 主要研究结果

令 $l = \delta + \tau$, 记 C 表示所有连续映射: $\varphi: [-l, 0] \rightarrow R^3$ 构成的 Banach 空间, 且范数定义为

$$\|\varphi\| = \max \left\{ \sup_{-l \leq \theta \leq 0} |\varphi_1(\theta)|, \sup_{-l \leq \theta \leq 0} |\varphi_2(\theta)|, \sup_{-l \leq \theta \leq 0} |\varphi_3(\theta)| \right\}$$

其中 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. 此外, 令

$$C_+ = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C: \varphi_i(\theta) > 0, \forall \theta \in [-l, 0], i = 1, 2, 3\}$$

模型(1)的初始条件为

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \varphi_1(\theta), I(\theta) = \varphi_2(\theta), R(\theta) = \varphi_3(\theta) \\ -l \leq \theta \leq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C_+$.

由于模型(1)中的第一和第二个方程中都不含

$R(t)$, 只需研究如下模型

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \\ &\quad \beta S(t - \delta - \tau)I(t - \delta - \tau)e^{-\mu(\delta + \tau)}e^{-\alpha\delta} \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \beta S(t - \delta)I(t - \delta)e^{-(\mu + \alpha)\delta} - \\ &\quad (\mu + \alpha)I(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由模型(3)可知其平衡点应满足如下方程

$$\left. \begin{aligned} A - \mu S - (\beta S + \beta S e^{-\mu(\delta + \tau)}e^{-\alpha\delta})I &= 0 \\ (\beta S - \beta S e^{-(\mu + \alpha)\delta} - (\mu + \alpha))I &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

易求得模型(3)存在着无病平衡点 $P_0 = \left(\frac{A}{\mu}, 0\right)$. 定义基本再生数

$$R_0 = \frac{A\beta(1 - e^{-(\mu + \alpha)\delta})}{\mu(\mu + \alpha)}$$

再由式(4)可得

$$S = \frac{A}{\mu R_0}, I = \frac{A}{\beta}(R_0 - 1) \frac{1}{1 - e^{-\mu(\delta + \tau)}e^{-\alpha\delta}} \quad (5)$$

由此可得到以下定理1.

定理1 当 $R_0 \leq 1$ 时, 模型(3)只存在无病平衡点 $P_0 = \left(\frac{A}{\mu}, 0\right)$; 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(3)除无病平衡点 P_0 外还存在地方病平衡点 $P^*(S^*, I^*)$. 其中 S^* , I^* 满足式(5).

定理2 若 $R_0 \leq \frac{A\beta}{\mu(\mu + \alpha)} < 1$, 则模型(3)的无病平衡点 $P_0\left(\frac{A}{\mu}, 0\right)$ 在 Ω 中全局吸引; 若 $R_0 > 1$, 则模型(3)的无病平衡点 $P_0\left(\frac{A}{\mu}, 0\right)$ 不稳定.

证明 设 $\varphi(t) = (S(t), I(t))$ 是模型(3)的满足初值(2)的解.

$$\begin{aligned} I'(t) &\leq \beta S(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t) \leq \\ &\quad (\mu + \alpha)I(t) \left(\frac{A\beta}{\mu(\mu + \alpha)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

由式(6)可知, 当 $R_0 \leq \frac{A\beta}{\mu(\mu + \alpha)} < 1$ 时, 在区域 Ω 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$.

因此, 对任意小的 ε , 存在 $T > 0$, 当 $t > T$ 时, 使得 $I(t) < \varepsilon$. 再由模型(3)的第一个方程, 当 $t > T$ 时, 有

$$S'(t) \geq A - \mu S(t) - \beta \varepsilon S(t) = A - (\mu + \beta \varepsilon)S(t)$$

利用比较原理得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq \frac{A}{\mu + \beta \varepsilon} \quad (7)$$

由式(7)及 ε 的任意性,在 Ω 区域内有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{A}{\mu}.$$

模型(3)的无病平衡点 P_0 在 Ω 中全局渐近稳定.

当 $R_0 > 1$ 时,模型(3)在无病平衡点 P_0 处对应的特征方程为

$$(\lambda + \mu) \left[\lambda - \beta \frac{A}{\mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu + \alpha)\delta}) + (\mu + \alpha) \right] = 0$$

令

$$f(\lambda) = \lambda - \beta \frac{A}{\mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu + \alpha)\delta}) + (\mu + \alpha) = 0$$

有 $f(0) = (\mu + \alpha)(1 - R_0) < 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = +\infty$, 故模型(3)至少存在一个正特征根,则 P_0 不稳定. 证毕.

易求得模型(1)的无病平衡点为 $\bar{P}_0\left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right)$, 由微分方程极限理论知,有以下定理.

定理3 若 $R_0 \leq \frac{A\beta}{\mu(\mu + \alpha)} < 1$, 则模型(1)的无病平衡点 $\bar{P}_0\left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right)$ 在 Ω 中全局吸引; 若 $R_0 > 1$, 则模型(1)的无病平衡点 $\bar{P}_0\left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right)$ 不稳定.

定理4 当 $R_0 > 1$ 时,模型(1)是一致持久的.

证明 因 $S(t), I(t), R(t)$ 在区域 Ω 内最终有上界,只需证明 $S(t), I(t), R(t)$ 在区域 Ω 内有正的下界.

选取充分小的 $m > 0$ 及充分大的 $T_0 > 0$, 由 $R_0 > 1$, 有

$$\frac{\beta}{\mu + \alpha} \frac{A}{\mu + m\beta} (1 - e^{-(\mu + m\beta)T_0}) (1 - e^{-(\mu + \alpha)\delta}) = \frac{\beta}{\mu + \alpha} S^\Delta > 1 \quad (8)$$

$$\text{其中 } S^\Delta = \frac{A}{\mu + m\beta} (1 - e^{-(\mu + m\beta)T_0}).$$

对上述 m, T_0 , 当 $t \geq T_0$ 时,不可能有 $I(t) \leq m$ 成立. 不然,存在 $t_1 > T_0$, 当 $t \geq t_1 + T_0$ 时,有 $I(t) \leq m$, 由模型(3)使得

$$S'(t) \geq A - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) \geq$$

$$A - \mu S(t) - \beta m S(t) = A - (\mu + m\beta)S(t) =$$

$$(\mu + m\beta) \left(\frac{A}{\mu + m\beta} - S(t) \right)$$

由比较定理,可得

$$S(t) \geq \frac{A}{\mu + m\beta} (1 - e^{-(\mu + m\beta)(t-t_1)}) + S(t_1) e^{-(\mu + m\beta)(t-t_1)} \geq$$

$$\frac{A}{\mu + m\beta} (1 - e^{-(\mu + m\beta)(t-t_1)})$$

由式(8),当 $t \geq t_1 + T_0$ 时,有

$$S(t) \geq \frac{A}{\mu + m\beta} (1 - e^{-(\mu + m\beta)T_0}) = S^\Delta \quad (9)$$

做辅助函数 $V(t)$

$$V(t) = I(t) - \int_{t-\delta}^t \beta e^{-(\mu + \alpha)\delta} S(u) I(u) du$$

$V(t)$ 沿模型(1)求导,再由式(9)得

$$\begin{aligned} V'(t) &= I'(t) - (\beta e^{-(\mu + \alpha)\delta} S(t) I(t) - \\ &\quad \beta e^{-(\mu + \alpha)\delta} S(t - \delta) I(t - \delta)) = \\ &\quad \beta S(t) I(t) - \beta e^{-(\mu + \alpha)\delta} S(t) I(t) - \\ &\quad (\mu + \alpha) I(t) \geq [\beta (1 - e^{-(\mu + \alpha)\delta}) S^\Delta - \\ &\quad (\mu + \alpha)] I(t) \end{aligned} \quad (10)$$

设 $i = \min_{t \in [t_1, t_1 + \delta]} I(t)$, 对所有的 $t \geq t_1 + T_0$, 有 $I(t) \geq i$. 否则,存在 $t_2 \geq t_1 + \delta$, 使得 $I(t_2) = i$, 并且,当 $t \in [t_1, t_2]$ 时, $I(t) \geq i$ 成立.

由模型(1)的第二个方程

$$I(t) = \int_{t-\delta}^t \beta e^{-(\mu + \alpha)(t-u)} S(u) I(u) du \quad (11)$$

由式(9)得

$$I(t) \geq \beta S^\Delta \int_{t-\delta}^t e^{-(\mu + \alpha)(t-u)} I(u) du$$

故

$$I(t_2) > \beta S^\Delta I(t_2) \int_{t_2-\delta}^{t_2} e^{-(\mu + \alpha)(t_2-u)} du =$$

$$\frac{\beta S^\Delta (1 - e^{-(\mu + \alpha)\delta})}{\mu + \alpha} I(t_2)$$

与式(8)矛盾. 于是,假设不成立. 当 $t \geq t_1 + T_0$ 时,有 $I(t) \geq i$.

因此,当 $R_0 > 1$ 时,由式(10)得, $V'(t) > 0$, 这与 $V(t)$ 的有界性矛盾. 所以,不可能有 $I(t) < m$.

$I(t)$ 还存在以下两种情况:

i) 当 $t \geq T_0$ 时, $I(t) \geq m$; 显然 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq m$ 成立.

ii) 当 $t \geq T_0$ 时, $I(t)$ 关于 m 振荡, $I(t)$ 仍有正的下界.

事实上,存在 $h > 0, t_0 > T_0 + \delta + \tau$, 使得 $I(t_0) = I(t_0 + h) = m$, 且有 $I(t) \leq m, \forall t \in [t_0, t_0 + h]$. 于是,由 $I(t)$ 的连续性知,存在 $g (0 < g < \tau)$, 有

$$I(t) \geq \frac{m}{2}, t \in [t_0, t_0 + g] \quad (12)$$

当 $h \leq g < \delta + \tau$ 时, 由式(12), 显然 $I(t) \geq \frac{m}{2}$,

$t \in [t_0, t_0 + h]$;

当 $g < h \leq \delta + \tau$ 时, 由式(9)、(11)得

$$I(t) \geq \beta \int_{t_0}^{t_0+g} e^{-(\mu+\alpha)(t-u)} S(u) I(u) du >$$

$$\beta S^{\Delta} \frac{m}{2} e^{-(\mu+\alpha)\delta} g = q_1, t \in [t_0, t_0 + h]$$

当 $g < \delta + \tau < h$ 时, 有下面两种情况

i) 当 $t \in [t_0, t_0 + \delta + \tau]$ 时, 易得 $I(t) > q_1$;

ii) 当 $t \in [t_0 + \delta + \tau, t_0 + h]$ 时, 仍有 $I(t) > q_1$ 成立. 否则, 假设存在 t^* , 当 $t^* \in [t_0 + \delta + \tau, t_0 + h]$ 时, 使得对 $\forall t \in [t_0 + \delta + \tau, t^*]$, 有 $I(t) \geq q_1$, 且 $I(t^*) = q_1$, 由式(11)知

$$I(t^*) = \beta \int_{t^*-\delta}^{t^*} e^{-(\mu+\alpha)(t^*-u)} S(u) I(u) du >$$

$$\frac{\beta S^{\Delta} (1 - e^{-(\mu+\alpha)\delta})}{\mu + \alpha} q_1$$

与式(8)矛盾, 故假设不成立.

令 $v_2 = \min\left\{\frac{m}{2}, q_1\right\}$, 当 $t \geq T_0$ 时, 有

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq v_2 > 0 \quad (13)$$

由模型(1)的第一个方程知

$$S'(t) \geq A - \left(\frac{\beta A}{\mu} + \mu\right) S(t)$$

利用比较原理

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{A}{\frac{\beta A}{\mu} + \mu} = v_1 > 0 \quad (14)$$

再由模型(1)的第三个方程知

$$R(t) = \int_{t-\delta-\tau}^{t-\delta} \beta e^{-(\mu+\alpha)\delta-(t-\delta-u)\mu} S(u) I(u) du$$

由式(13)、(14)得

$$R(t) \geq \frac{\beta e^{-(\mu+\alpha)\delta} (1 - e^{-\mu\tau}) v_1 v_2}{\mu} = v_3 > 0 \quad (15)$$

由式(13)、(14)、(15), 模型(1)是一致持久的. 证毕.

2 数值模拟

在模型(1)中, 取 $A = 0.2, \alpha = 0.15, \mu = 0.069$,

$\beta = 0.2, \delta = 14, \tau = 7$, 满足定理2条件 $R_0 \leq \frac{A\beta}{\mu(\mu+\alpha)} \approx 0.26 < 1$, 无病平衡点 $P_0(2.899, 0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的, 即疾病趋于灭绝, 取初值 $S(0) = 0.1, I$

$(0) = 0.01, R(0) = 0.05$, 可得模型中的 $S(t), I(t), R(t)$ 的变化如图1.

若令 $A = 0.2, \alpha = 0.15, \mu = 0.069, \beta = 2, \delta = 14, \tau = 7$, 计算基本再生数 $R_0 = \frac{A\beta(1 - e^{-(\mu+\alpha)\delta})}{\mu(\mu+\alpha)} \approx 1.4 > 1$, 地方病平衡点为 $P^*(2.070, 0.041, 0.152)$. 由定理4知, 疾病是一致持久的, 取初值为 $S(0) = 0.1, I(0) = 0.01, R(0) = 0.05$, 模型中的 $S(t), I(t), R(t)$ 的变化如图2.

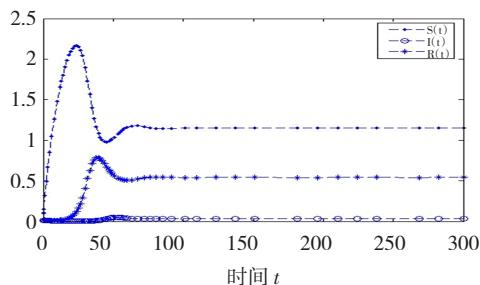


图1 无病平衡点的全局稳定性

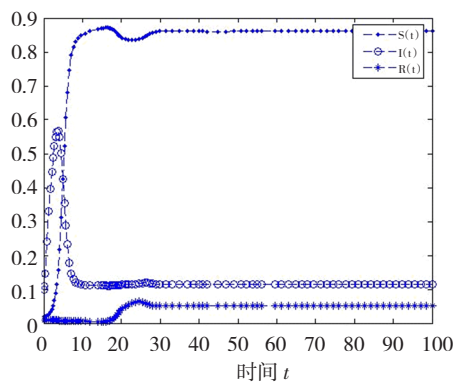


图2 $R_0 > 1, \tau = 7$

若取 $\tau = 10$, 其他参数不变, 则基本再生数不变, 地方病平衡点为 $P^*(2.070, 0.041, 0.021)$, 疾病仍是一致持久的. 模型中的 $S(t), I(t), R(t)$ 的变化如图3.

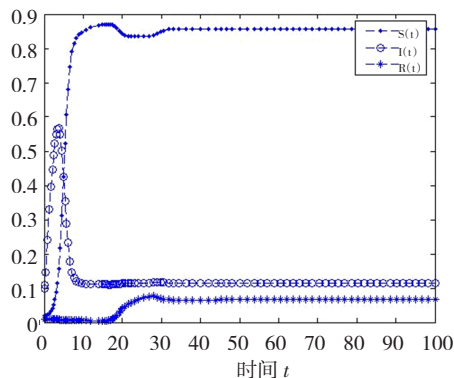


图3 $R_0 > 1, \tau = 10$

观察图2、图3发现当恢复期长时,患病人群增多,易感人群基本不变.

通过数值模拟可以看出,基本再生数的大小决定疾病传播与否,当 $R_0 < 1$ 时,疾病趋于灭绝,当治愈期较长时,易感人群减少,患病人群增多;当 $R_0 > 1$ 时,疾病是持久的,并且通过恢复期 τ 的取值可以得出,恢复期较长的疾病,患病人群增多.因此,可通过提高医疗技术,减少疾病的恢复期,尽快使病人康复,才能减缓疾病的传播速度.

参考文献:

- [1] RUI XU, MA Zhien, WANG Zhiping. Global Stability of a Delayed SIRS E-pidemic Model with Saturation Incidence and Temporary Immunity [J]. Nonlinear Dyn, 2010, 59(9): 3211–3221.
- [2] DING Deqiong, DING Xiaohua. Global Stability of Multi-group Vaccination Epidemic Models with Delays[J]. Nonlinear Analysis: Real world Applications, 2011, 12(4): 1991–1997.
- [3] 张敬,谢守波,高文杰. 一类具有时滞的 SIRS 传染病模型的研究[J]. 东北师大学报:自然科学版, 2011, 43(2): 10–15.
- [4] 陈方方,洪灵. 一类具有时滞和非线性发生率的 SIRS 传染病

模型稳定性与 Hopf 分岔分析[J]. 动力学与控制学报, 2014, 12(1): 79–85.

- [5] 尚乔歌,张龙飞,滕志东. 有离散时滞和标准发生率的 SIR 传染病模型的全局吸引性和持久性[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2012, 29(2): 174–181.
- [6] YOICHI Enatsu, YUKIHIKO Nakata, YOSHIKI Muroya. Lyapunov Functional Techniques for the Global Stability Analysis of a Delayed SIRS Epidemic Model [J]. Nonlinear Analysis: Real world Applications, 2012, 13(5): 2120–2133.
- [7] SUBHRA Bhattacharya, FREDERICK R Adler. A Time Since Recovery Model with Varying Rates of Loss of Immunity[J]. Society for Mathematical Biology, 2012, 10(7): 1153–1163.
- [8] YOSHIKI Muroya, ALFREDO Bellen, YOICHI Enatsu, et al. Global Stability for a Discrete Epidemic Model for Disease with Immunity and Latency Spreading in a Heterogeneous Host Population [J]. Nonlinear Analysis: Real world Applications, 2012, 13(1): 258–274.
- [9] 李鸣明,刘贤宁,吴凡. 一个具有非线性发生率的时滞 SIR 传染病模型的稳定性[J]. 西南大学学报:自然科学版, 2014, 36(5): 61–66.

(编辑:关毅)